

Übungsstunde 4

Nachbesprechung Bonus

- $\forall x \forall y \forall z$ statt $\forall x, y, z$
- \Leftrightarrow nicht in Formeln!

3.2 From Natural Language to a Formula (★)

(4 Points)

Consider the universe $U = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Express each of the following statements with a formula in predicate logic, in which the only predicates appearing are $\text{divides}(x, y)$, $\text{equals}(x, y)$ and $\text{prime}(x)$ (instead of $\text{divides}(x, y)$ and $\text{equals}(x, y)$ you can write $x \mid y$ and $x = y$ accordingly). You can also use the symbols $+$ and \cdot to denote the addition and multiplication functions, and you can use constants (e.g., $0, 1, \dots$). You can also use \longleftrightarrow . No justification is required.

- (★) If a number divides two numbers, then it also divides their sum.
- (★) The only divisors of a prime number are 1 and the number itself.
- (★) 1 is the only natural number which has an inverse.
- (★) A prime number divides the product of two natural numbers if and only if it divides at least one of them.

Nachbesprechung Bonus

3.8 Proof by Contradiction (★)

(4 Points)

Let $n, m \in \mathbb{N}$ be arbitrary. We say “ n divides m ” and write $n \mid m$ if there exists a $k \in \mathbb{N}$ such that $k \cdot n = m$. Prove that the following statement is true, using a proof by contradiction:

$$n \mid m \text{ and } n \mid (m + 1) \implies n = 1.$$

You are allowed to invoke the statement 3.2 iii) from above to justify one step.

You must use the same notation as in the lecture notes, i.e. precisely state what your statements S and T are, and justify each of your proof steps.

Definition 2.17. A *proof by contradiction* of a statement S proceeds in three steps:

1. Find a suitable mathematical statement T .
2. Prove that T is false.
3. Assume that S is false and prove (from this assumption) that T is true (a contradiction).

Mengenlehre

Einführung

- Uns schon bekannte Mengen sind z.B.: \mathbb{N} , \mathbb{R} , $\{0,1,2\}$, \emptyset
- In Mengen spielt Reihenfolge und Häufigkeit keine Rolle:
 $\{1,2\} = \{2,1\} = \{2,1,2\}$
- Mengen können Mengen enthalten:
 $\{1, \{1\}, \{5, \{3,2\}\}, \emptyset\}$

Element und Teilmenge

- $x \in A$: x ist ein **Element** der Menge A
 $2 \in \mathbb{N}$, $-1 \notin \{0,2,4\}$, $\{1,2\} \in \{\{1,2\}, 6\}$
- $X \subseteq A$: Die Menge X ist eine **Teilmenge** der Menge A
 $\{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2\} \not\subseteq \{1, \{2\}\}$
Für jede Menge A gilt: $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$

Aufgaben

Wir haben folgende Mengen:

$$A = \{1,2\}, \quad B = \{\{1\}, 2, \{1\}, \{\emptyset\}\}, \quad C = \{1,1\}, \quad D = \{\{1\}\}, \quad E = \emptyset$$

Welche Beziehungen gelten zwischen den Mengen?

Aufgaben

a) Mengen ohne Doppelungen: $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, 2, \{\emptyset\}\}$, $C = \{1\}$, $D = \{\{1\}\}$, $E = \emptyset$

- Da E die leere Menge ist gilt: $E \subseteq A$, $E \subseteq B$, $E \subseteq C$, $E \subseteq D$
- Jede Menge ist eine Teilmenge um sich selbst: $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$, $D \subseteq D$, $E \subseteq E$
- $C \subseteq A$
- $C \in B$
- $C \in D$
- $D \subseteq B$

Definitionen

- Vereinigung: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- Schnittmenge: $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- Differenz: $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B)$

- Potenzmenge: $\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$
Für eine endliche Menge A gilt: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- Kartesisches Produkt: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
Für endliche Mengen A und B gilt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Beispiele – Elemente und Kardinalität

- $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$
- $(\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}) \setminus \{\emptyset\}$
- $\{2, \{4\}\} \times \{\{0\} \cup \{1\}, \{1,0\}\}$
- $\{0,1\} \times \{(0,1)\}$
- $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

Beispiele

$$\cdot \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \quad |\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})| = 8$$

$$\cdot (\{1\} \cup \{\emptyset\}) \setminus \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{1\} = \{\emptyset\} \quad |(\{1\} \cup \{\emptyset\}) \setminus \{1\}| = 1$$

$$\cdot \{2, \{4\}\} \times \{\emptyset \cup \{1\}, \{1, \emptyset\}\} = \{2, \{4\}\} \times \{\emptyset, \{1\}, \{1, \emptyset\}\} = \{2, \{4\}\} \times \{\emptyset, \{1\}\} \\ = \{(2, \emptyset), (\{4\}, \{1\})\}$$

$$\hookrightarrow |\{2, \{4\}\} \times \{\emptyset \cup \{1\}, \{1, \emptyset\}\}| = 2$$

$$\cdot \{0, 1\} \times \{(0, 1)\} = \{(0, (0, 1)), (1, (0, 1))\} \quad |\{0, 1\} \times \{(0, 1)\}| = 2$$

$$\cdot \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \quad |\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})| = 4$$

Gleichheit von Mengen beweisen/widerlegen

Beweise oder widerlege:

Für alle Mengen A, B, C gilt: $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

Aufgabe (Prüfungsaufgabe)

Die Aussage ist falsch. Wir zeigen dies mit einem Gegenbeispiel:

$$\text{Sei } A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$C = \{2\}$$

Dann gilt:

$$(A \setminus B) \setminus C = (\{1, 2\} \setminus \{2, 3\}) \setminus \{2\}$$

$$= \{1\} \setminus \{2\}$$

$$= \{1\}$$

$$A \setminus (B \setminus C) = \{1, 2\} \setminus (\{2, 3\} \setminus \{2\})$$

$$= \{1, 2\} \setminus \{3\}$$

$$= \{1, 2\}$$

Da $\{1\} \neq \{1, 2\}$ gilt $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

Gleichheit von Mengen beweisen/widerlegen

Beweise oder widerlege:

Für alle Mengen A, B, C gilt: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Definition 3.2. $A = B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$

Aufgabe

Intuition: (nicht Teil von Beweis!)

Probieren wir ein paar Beispiele:

• $A=B=C=\{1\}$

$$A \setminus (B \setminus C) = \{1\} \setminus (\{1\} \setminus \{1\}) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$$

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = (\{1\} \setminus \{1\}) \cup (\{1\} \cap \{1\}) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\} \quad \checkmark$$

• $A=\{1,2\}, B=\{2,3\}, C=\{5\}$

$$A \setminus (B \setminus C) = \{1,2\} \setminus (\{2,3\} \setminus \{5\}) = \{1,2\} \setminus \{2,3\} = \{1\}$$

$$(A \setminus B) \cup (A \cap C) = (\{1,2\} \setminus \{2,3\}) \cup (\{1,2\} \cap \{5\}) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\} \quad \checkmark$$

↳ Wenn wir das Gefühl haben, dass Gleichheit gilt, versuchen wir dies formal zu beweisen:

Beweis:

Seien A, B, C beliebig:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \setminus C) && \text{(Def. \setminus)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg x \in C) && \text{(Def. \setminus)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in B \vee \neg \neg x \in C) && \text{(de Morgan)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in B \vee x \in C) && \text{(double negation)} \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) && \text{(distr. law)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee (x \in A \wedge x \in C) && \text{(Def. \setminus)} \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C && \text{(Def. \cap)} \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C) && \text{(Def. \cup)} \end{aligned}$$

→ weitere Beweisarten, um $A=B$ zu beweisen:

- 1.) $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ separat beweisen
→ $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
→ $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$
→ Lemma 3.2:
 $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow A=B$
- 2.) Theorem 3.4. (nicht in Bonus diese Woche)

Thus we proved $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ for any sets A, B, C

Klausurfragen

Let $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. List all subsets S of A such that $\emptyset \in S$. *(2 Points)*

Show two sets A, B such that $A \cap B \in B$. *(1 Point)*

How many elements does the set $\{\{0, 1\}, \{0\} \times \{1\}\} \times \{0\}$ have?

- 3.) Find sets A, B , and C such that $|A| = |B| = |C| = 2$, $|A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = 1$, and $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Klausurfragen - In der Klausur ist nicht nach dem Lösungsweg/Begründung gefragt

1. $\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \}$

Nun listen wir alle Elemente auf, für die \emptyset ein Element ist:

$$\{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \}$$

2. z.B.: $A = \{ 1 \}$

$$B = \{ 1, \{ 1 \} \}$$

Dann gilt: $A \cap B = \{ 1 \} \in B$

3. $|\{ \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \times \{ 1 \} \} \times \{ 0 \}| = |\{ \{ 0, 1 \}, \{ (0, 1) \} \} \times \{ 0 \}|$
 $= |\{ (\{ 0, 1 \}, 0), (\{ (0, 1) \}, 0) \}| = 2$

4. z.B.: $A = \{ 1, 2 \}$

$$B = \{ 2, 3 \}$$

$$C = \{ 1, 3 \}$$

Dann gilt: $|A| = |B| = |C| = 2$

$$|A \cap B| = |\{ 2 \}| = 1$$

$$|B \cap C| = |\{ 3 \}| = 1$$

$$|A \cap C| = |\{ 1 \}| = 1$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$